ÉCOLE NATIONALE DES INGÉNIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

CONCOURS D'ENTRÉE

1978

OPTION BIOLOGIE-MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

I

Dans un espace affine euclidien, de dimension 2, rapporté à un repère orthonormé (Ox , Oy) l'ensemble des points M (x , y) vérifiant la relation

(1) $\quad y^n = ax^n + b$

constituent une courbe (C) dépendant de 3 paramètres réels n (supposé $\neq 0$), a et b

1°) On considère le point A de coordonnées (4 , 3) et la droite (T) passant par ce point et ayant pour coefficient directeur $-\frac{1}{2}$. Déterminer a et b en fonction de n pour que A appartienne à (C) et pour que (T) soit tangente à (C) en A. En considérant y comme fonction de x construire les courbes (C) dans les 3 cas

$$n = 2 \quad , \qquad n = \frac{1}{2} \quad , \quad \text{et} \quad n = 3 \quad .$$

2°) Pour chacune de ces 3 courbes, calculer le rayon de courbure en A. Vérifier que les valeurs trouvées sont proportionnelles en valeur absolue aux valeurs correspondantes de

$$\frac{1}{|n-1|}$$

3°) Démontrer que les fonctions $x \longmapsto y$ définies par la relation (1) vérifient l'équation différentielle

(2) $\quad xyy'' + (n-1)\,y'(xy' - y) = 0$

4°) Soient une courbe (C) quelconque, M un point arbitraire de (C). Généralement (C) admet en M une tangente qui coupe x'x en P et y'y en Q et un centre de courbure Ω. H étant la projection orthogonale de O sur PQ, montrer que (2) entraîne

(3) $\quad \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = (n-1)\,\overrightarrow{M\Omega} \cdot \overrightarrow{OH}$

Retrouver à l'aide de cette propriété géométrique la relation de proportionnalité établie à la question 2°).

II

Pour $x \neq 0$ et $y \neq 0$ on met l'équation (2) sous la forme

(4) $\quad \frac{y''}{y'} + (n-1)\frac{y'}{y} - \frac{n-1}{x} = 0$

1°) On suppose $n \neq 0$, intégrer (4)

2°) On suppose $n = 0$. Quelle est la forme générale des solutions de (4) ? Vérifier que $y = x^2$ est solution

3°) Tracer sur une même figure la parabole (Π) d'équation $y = x^2$ et la courbe (C) d'équation $y^2 = 4x^2 - 4$. Montrer que ces deux courbes sont tangentes en deux points. Que peut-on dire d'avance, pour chacun des points de contact, de la position relative des centres de courbures de (Π) et de (C) ?

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail